Récapitulatif de la séance n°0
Introduction

Exercice 1

- L'erreur se trouve dans le passage de $(x-v)^2 = (y-v)^2$ à $x - v = y - v$ qui n'est pas vrai dans le cas général. En effet, $(2)^2 = (-2)^2$ est vrai dans $\mathbb{R}$ mais n'implique pas $-2 = 2$.

- La règle générale est que $a^2 = b^2$ implique $a = b$ si et seulement si a et b sont de même signe.

- D'autre part, même en disposant de la valeur de v et de l'équation $x + y = 2v$, il n'est pas possible de résoudre cette dernière car elle implique 2 inconnues. Dans le cas général, il faut n équations linéaires indépendantes pour résoudre un système à n inconnues.

Exercice 2 Résolution d'équations polynomiales :

1. Une équation du 1^{er} degré $ax + b = 0$ admet une unique solution $-\dfrac{b}{a}$.
2. Une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ se résout en calculant le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
   - Si $\Delta = 0$, $S_{\mathbb{R}} = S_{\mathbb{C}} = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
   - Si $\Delta > 0$, $S_{\mathbb{R}} = S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.
   - Si $\Delta < 0$, $S_{\mathbb{R}} = \varnothing, S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$, et les solutions sont les conjugués l'une de l'autre.
   - Pour les équations de degré 3 et 4 :
     - Il faut retenir que les méthodes de Tartaglia-Cardan et de Ferrari permettent de retrouver de manière exacte les solutions.
     - Abel en s'appuyant sur le travail de Galois, a prouvé qu'au delà du degré 4, il n'est pas possible de résoudre les équations générales par les radicaux.
     - J'invite les plus curieux à jeter un coup d'oeil sur l'article Wikipédia de la première méthode (Tartaglia-Cardan) qui est abordable.
3. Les équations de degré 3 de l'exercice admettent 0 comme racine donc sont divisibles par x. Pour trouver les autres racines, il faut diviser le polynôme par x et se ramener à une équation de degré 2.
4. Les équations de degré 4 de l'exercice ne sont pas génériques, en effet elles n'ont pas de termes à degré impaire. Un changement de variable $y = x^2$ ramène l'équation à une autre de degré 2. Résoudre cette dernière donne 2 solutions y_1 et y_2. À partir de ces 2 solutions, on déduit les 4 solutions $\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}$ et $-\sqrt{y_2}$ (si l'équation de degré 2 admet une unique solution, alors celle de degré 4 n'en admet que 2).

Identités trigonométriques :

$$\begin{array}{rcl} \cos(a+b) & = & \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) & = & \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) & = & \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) & = & \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \end{array}$$

Exercice 3 $\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2) \iff \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ ou $\theta_1 = (\pi - \theta_2) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
1. Appliquer la règle générale ci-dessus. Une des deux solutions vaut $\frac{\pi}{5}$.
2. Par applications successives des règles trigonométriques encadrées, ainsi que l'identité $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, trouver un polynôme P de degré 2.
3. Par la première question $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) P\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = 0$, or $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \neq 0$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est une des racines de P.
Résoudre P donne 2 solutions, la solution positive donne $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 4 1. Utiliser $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ ainsi que les règles trigonométriques encadrées.
Trouver $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.
2. L'équation

$$(\sqrt{3}+1)\cos(x) + (\sqrt{3}-1)\sin(x) + \sqrt{3} - 1 = 0$$

est équivalente à

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

qui est équivalente à

$$\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

en appliquant la deuxième règle encadrée et le fait que sin est impaire.
Ensuite, utiliser $\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ et conclure.

Exercice 5 1. La dérivée de $f(x)$ est $2x - 4$.
2. La dérivée d'une fonction $u^n(x)$ est $nu'(x)u^{n-1}(x)$.
3. Remarquer que $h(x) = f(g(x))$, et utiliser la formule $h'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
1. f est bien impaire car $f(-x) = -f(x)$. On en déduit que sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.
2. La dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v - uv'}{v^2}$. La fonction est croissante quand sa dérivée est positive et décroissante quand elle est négative.
3. L'équation de la tangente au point x_0 est $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.
4. La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est la limite du quotient du terme de plus haut degré du numérateur et du terme de plus haut degré du dénominateur.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ se déduit de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ car f est impaire.