Récapitulatif de la séance n°1
Nombres complexes et Trigonométrie

Exercice 1

- Pour les additions, l'exercice ne présente aucune difficulté.
  - L'addition de $a+ib$ et $c+id$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ donne $(a+c)+i(b+d)$.

- Pour les produits, utiliser l'identité principale des nombres complexes *i.e.* $i^2=-1$.
  - Le produit de $a+ib$ et $c+id$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ donne $ac+i^2bd+i(bc+ad)$ qui se simplifie en $(ac-bd)+i(bc+ad)$.

- Pour les quotients, multiplier le numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur pour obtenir un réel au dénominateur. Le conjugué de $z=a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ est noté $\bar{z}$ et vaut $a-ib$.
  - Exemple de quotient avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$: $\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\dfrac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{(c^2+d^2)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

Exercice 2 Pour trouver les conjugués, utiliser les différentes règles suivantes (prouvées pendant le TD) :

$$\begin{array}{rcl} \bullet\ \overline{z_1+z_2} & = & \overline{z_1}+\overline{z_2} \\ \bullet\ \overline{z_1z_2} & = & \overline{z_1}\ \overline{z_2} \\ \bullet\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} & = & \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \end{array}$$

Exercice 3 Pour démontrer l'*identité du parallélogramme* :

$$\begin{array}{rcl} |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 & = & (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)} \\ & = & (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) \\ & = & z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1} \\ & = & 2z_1\overline{z_1}+2z_2\overline{z_2} \\ & = & 2|z_1|^2+2|z_2|^2 \end{array}$$

Exercice 4 Quand le produit $p=ab$ et la somme $s=a+b$ de deux nombres sont connus, il faut résoudre une équation de 2^{nd} degré pour trouver a et b.
En effet, la fonction polynomiale $f(x)=(x-a)(x-b)$ admet a et b comme racine et peut s'écrire en développant : $f(x)=x^2-(a+b)x+ab=x^2-sx+p$.

- Pour répondre à la première question, il faut résoudre $x^2-3x+2=0$ qui donne 2 racines réelles.
- Pour répondre à la deuxième question, il faut résoudre $x^2-2x+3=0$ qui donne 2 racines complexes.

Exercice 5 Pour répondre à ce genre de question, retenir les 3 principales règles suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \cos(\theta_1)=\cos(\theta_2) & \Rightarrow & \theta_1=\theta_2+2k\pi \text{ ou } \theta_1=-\theta_2+2k\pi \\ \sin(\theta_1)=\sin(\theta_2) & \Rightarrow & \theta_1=\theta_2+2k\pi \text{ ou } \theta_1=(\pi-\theta_2)+2k\pi \\ \cos(\theta) & = & \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

Exercice 6 Pour mettre $z=a+ib$ sous forme trigonométrique, commencer par calculer $|z|$ le module de z qui vaut $|a^2+b^2|$. Ensuite résoudre le système suivant pour trouver l'argument θ :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|}\end{array}\right.$$

– La forme trigonométrique de z est $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
– La forme exponentielle de z est $z = |z|e^{i\theta}$.

Remarquons, néanmoins que dans certains cas, il n'est pas nécessaire de faire les calculs. Par exemple, si la forme exponentielle de z est connue et vaut $z = |z|e^{i\theta}$ alors, on peut en déduire la forme exponentielle du conjugué ainsi que de l'opposé de z.

- $\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$
- $-z = |z|e^{i(\theta+\pi)}$

Exercice 7 Commencer par écrire $1 + z = e^0 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$ or $e^{-i\frac{\theta}{2}}$ et $e^{i\frac{\theta}{2}}$ sont conjugués et $e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
Nous obtenons $1 + z = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$, et comme $\frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est bien positif et est donc égal au module.
La conclusion est que $|1 + z| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $arg(1 + z) = \frac{\theta}{2}$

Exercice 8
D'une part, $|z - i| = (z - i)(\overline{z} + i) = z\overline{z} + 1 + i(z - \overline{z})$.
D'autre part, $|z + i| = (z + i)(\overline{z} - i) = z\overline{z} + 1 + i(\overline{z} - z)$.

1. Prouvons que $|z - i| = |z + i| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$:
   Par les deux premières équations, $|z - i| = |z + i| \Rightarrow (z - \overline{z}) = (\overline{z} - z)$ donc $z = \overline{z}$ et $z \in \mathbb{R}$.

2. Prouvons que $|z - i| = |z + i| \Leftarrow z \in \mathbb{R}$:
   $z \in \mathbb{R} \Rightarrow (z - \overline{z}) = 0$ donc $|z - i| = |z + i| = z\overline{z} + 1$.

Exercice 9 D'abord, le conjugué de $1 - z$ est $1 - \overline{z}$ donc $\dfrac{1 + z}{1 - z} = \dfrac{(1 + z)(1 - \overline{z})}{1 + z\overline{z}} = \dfrac{1 - z\overline{z} + (z - \overline{z})}{1 + z\overline{z}}$.

1. Prouvons que $|z| = 1 \Rightarrow \dfrac{1 + z}{1 - z} \in i\mathbb{R}$:
   $|z| = 1 \Longrightarrow 1 - z\overline{z} = 0$ et comme $(z - \overline{z})$ est imaginaire pur $\dfrac{1 + z}{1 - z}$ l'est aussi.
2. Prouvons que $|z| = 1 \Leftarrow \dfrac{1 + z}{1 - z} \in i\mathbb{R}$:
   $\dfrac{1 + z}{1 - z} \in i\mathbb{R} \Longrightarrow 1 - z\overline{z} + (z - \overline{z}) \in i\mathbb{R}$ or $(z - \overline{z}) \in i\mathbb{R}$ donc $1 - z\overline{z} = 1 - |z|^2 = (1 - |z|)(1 + |z|) = 0$ et $|z| = 1$ car $|z|$ est forcément positif.