

Feuille d'exercices n°1
Nombres complexes et Trigonométrie

Exercice 1 Mettre les nombres complexes suivants sous la forme $a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

- $(3 + 4i) + (10 - 2i)$ • $(-5 + 11i) - (-10 + 8i)$
- $(3 + 4i)(10 - 2i)$ • $(-5 + 11i)(-10 + 8i)$
- $\frac{3 + 4i}{10 - 2i}$ • $\frac{-5 + 11i}{-10 + 8i}$
- $(1 + i)^2 - 2i$ • $\frac{1 + 2i}{3 - 4i} + \frac{1 - 2i}{3 + 4i}$

Exercice 2 Pour chacun des nombres complexes suivants, donner pour tout $z \in \mathbb{C}$, son conjugué en fonction de \bar{z} :

- $(z + 2)$ • $(z - 3i)$
- $(z + 4i)(z - 9i)$ • $z(-z + i)$
- $\frac{z + 2i}{3z - 4i}$ • $\frac{-5z + 11i}{-10z + 8}$

Exercice 3 Démontrer pour tous nombres complexes z_1, z_2 l'*identité du parallélogramme* :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

Exercice 4 1. Trouver deux nombres complexes dont la somme vaut 3 et le produit 2.
2. Trouver deux nombres complexes dont la somme vaut 2 et le produit 3.

Exercice 5 Donner l'ensemble de solutions de chacune de ces équations :

- $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ • $\cos(2\theta) = \cos(3\theta)$
- $2\cos(\theta + \frac{\pi}{6}) = 1$ • $\cos(\theta) = \sin(2\theta)$

Exercice 6 En vous aidant du tableau de droite, donner les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes qui suivent :

- $(1 + i)$ • $(1 - i)$ • $(-1 - i)$

- $(4\sqrt{3} - 4i)$ • $(2\sqrt{3} + 2i)$ • $-\frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Exercice 7 Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le module ainsi qu'un argument de $1 + z$.

Exercice 8 Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z - i| = |z + i|$ si et seulement si z est réel.

Exercice 9 Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$$